DE LA INTEGRAL DE RIEMANN A LA TEORÍA DE LA MEDIDA

Miguel Ángel García Álvarez

1. Introducción

Aunque los conceptos de contenido o de medida de un conjunto pueden pensarse como una extensión de los conceptos de longitud, área, volumen, etc., en realidad, históricamente, surgieron de la teoría de integración.

El Cálculo Diferencial e Integral fue inventado por Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz a finales del siglo XVII. En su trabajo definieron el concepto de derivada de una función y geometricamente la interpretaban como la pendiente de la tangente a su gráfica. La integral de una función la vieron como la operación inversa de la derivada y geometricamente la interpetaban como el área de la región delimitada, en el intervalo de integración, por la gráfica de la función y el eje horizontal.

A medida que la teoría se fue desarrollando se plantearon problemas cada vez más complejos, los cuales hicieron ver la necesidad de definir los conceptos con mayor precisión y de demostrar resultados con métodos analíticos, en lugar de algunos métodos geométricos que se utilizaban. En particular, la manera en que se trataba con la integral de una función llevó a cuestionamientos acerca de la validez de algunas propiedades que se asumían como válidas. De particular importancia fue el trabajo de Jean-Baptiste Joseph Fourier, publicado en el año 1822 bajo el título *Théorie analytique de la chaleur* ([19]). Afirmó ahí que una función arbitraria f, definida y acotada en el intervalo $[-L, L]$, puede representarse mediante una serie trigonométrica de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sen\frac{n\pi x}{L}\right].$$

La demostración de Fourier de esta afirmación consiste básicamente en tratar el desarrollo anterior como una ecuación para la cual tendrían que encontrarse los coeficientes a_0, a_n y b_n ($n \in \mathbb{N}$) que la hacen válida. Para esto, integrando entre $-L$ y L ambos lados de la expresión, se obtiene:

$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2a_0L.$

Así que $a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx.$

Ahora, multiplicando por $\cos\frac{n\pi x}{L}$ ambos lados de la expresión e integrando, se obtiene:

$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = a_nL.$

Así que $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx.$

Finalmente, multiplicando por $sen\frac{n\pi x}{L}$ ambos lados de la expresión e integrando, se obtiene:

$\int_{-L}^{L} f(x)sen\frac{n\pi x}{L}dx = b_nL.$

Así que $b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sen\frac{n\pi x}{L}dx.$

Fourier argumentaba que las integrales que definen los coeficientes a_0, a_n y b_n están bien definidas pues cada una puede obtenerse mediante el cálculo del área bajo la gráfica de la función correspondiente.

Cabe mencionar que por función arbitraria Fourier no se refería a lo que actualmente se entiende por una función como cualquier correspondencia de un conjunto en otro; sin embargo dentro de las funciones que consideraba incluía no únicamente a las funciones continuas.

Además de la necesidad de clarificar el concepto de función, la demostración de Fourier planteaba los siguientes tres problemas:

1. Definiendo los coeficientes a_n y b_n como lo hacía Fourier,
   ¿la serie $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sen\frac{n\pi x}{L}\right]$ converge a $f(x)$?
2. ¿Para qué funciones f, las integrales que definen los coeficientes a_n y b_n ($n \in \mathbb{N}$) están definidas?
3. ¿Se puede integrar término a término una serie de funciones?

En el año 1823 se publicó el libro de Augustin-Louis Cauchy titulado *Résumé des leçons données à l'École Royale Politechnique sur le calcul infinitésimal* ([11]), en el cual trató el problema de la definición de la integral, primero para las funciones continuas y después para funciones con discontinuidades.

En ese trabajo, Cauchy definió el concepto de continuidad básicamente como se conoce actualmente:

Una función definida en un intervalo es continua si para cada x en el intervalo el valor numérico de la diferencia $f(x+\alpha) - f(x)$ decrece indefinidamente con α.

Más adelante formuló la definición analítica de la integral de una función continua, demostrando su existencia:

Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$, entonces las sumas:

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\,(x_k - x_{k-1}),$$

correspondientes a particiones $P = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ tienden a un límite cuando los elementos $x_k - x_{k-1}$ se hacen infinitamente pequeños; a ese límite se le llama la integral definida de f y se le denota por $\int_a^b f(x)dx$. Se obtiene el mismo límite si se consideran sumas de la forma $S = \sum_{k=1}^{n} f\left[x_{k-1} + \theta_k(x_k - x_{k-1})\right](x_k - x_{k-1})$, donde $\theta_k \in [0,1]$.

Demostró además que si f es una función continua y $F(x) = \int_a^x f(y)dy$, entonces $F'(x_0) = f(x_0)$ para cualquier $x_0 \in (a,b)$.

La integral así definida es conocida actualmente como la integral de Riemann y no como la integral de Cauchy. La razón de esto parece justa pues es el trabajo de Riemann, publicado en el año 1867, el que dió la pauta para desarrollar una Teoría de Integración, la cual a su vez llevaría más tarde a una Teoría del Contenido y finalmente a la moderna Teoría de la Medida.

En trabajos posteriores, Cauchy consideró funciones discontinuas haciendo la aclaración siguiente:

“es necesario observar que las funciones discontinuas introducidas en el Cálculo dejan de ser continuas únicamente para algunos valores de las variables”

Para este tipo de funciones discontinuas extendió el concepto de integral de la siguiente manera:

Si una función es continua en un intervalo $[a, b]$, excepto en un punto c, en una vecindad del cual f puede ser acotada o no, se puede definir la integral de f como el límite:

$$\lim_{h \rightsquigarrow 0} \left[\int_a^{c-h} f(x)dx + \int_{c-h}^{b} f(x)dx \right],$$

cuando éste existe.

En 1829, Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet conjeturó que el método de Cauchy para definir la integral de funciones discontinuas se puede extender a todas las funciones que tengan la siguiente propiedad:

Suponiendo que f está definida en un intervalo $[a, b]$, dadas dos cantidades arbitrarias u y v en ese intervalo, es posible encontrar otras dos cantidades r y s entre u y v tales que la función f es continua en el intervalo $[r, s]$.

Es decir, utilizando la terminología moderna, el conjunto de puntos donde la función es discontinua debe ser denso en ninguna parte. Recordemos que se dice que un conjunto A de números reales es denso en ninguna parte si dado cualquier intervalo abierto no vacío I, existe un intervalo abierto no vacío J contenido en I tal que $J \subset A^c$. Esto es equivalente a decir que la cerradura de A no tiene puntos interiores, o bien que A no es denso en ningún intervalo abierto no vacío.

2. La integral de Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann, en un artículo titulado *Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique* ([41]), el cual fue elaborado en 1854 pero publicado en 1867, cambió el enfoque para atacar el problema de la integración de funciones. Cauchy y quienes le siguieron buscaban extender la definición de la integral a funciones tan discontinuas como fuera posible, pero no partiendo de una definición general sino dando una definición distinta dependiendo del tipo de funciones que se querían integrar. En cambio, Riemann planteó una definición general de la integral para cualquier función y se abocó al problema de caracterizar a las funciones para las cuales esa integral está definida.

Planteaba Riemann:

¿Qué se debe entender por $\int_a^b f(x)dx$?

Consideremos una partición $x_0, x_1, \ldots, x_n$ del intervalo $[a, b]$ y definamos $\delta_k = x_k - x_{k-1}$. Si, independientemente de como se elijan las cantidades $\varepsilon_k \in [0, 1]$, las sumas

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k f(x_{k-1} + \varepsilon_k \delta_k)$$

tienden a un límite cuando todas las cantidades δ_k tienden a cero, a ese límite se le llama el valor de la integral definida $\int_a^b f(x)dx$.

Decía Riemann:

> *"Busquemos ahora la extensión y el límite de la definición precedente y hagámonos esta pregunta: ¿En qué casos una función es susceptible de integración?, ¿en qué casos no lo es?"*

Estableció dos criterios, ambos basados en el concepto de oscilación de una función en un intervalo.

Definición 1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. La diferencia:*

$\sup \{f(x) : x \in [a, b]\} - \text{ínf} \{f(x) : x \in [a, b]\}$

es llamada la oscilación de f en el intervalo $[a, b]$.

Criterio R_1

Sea D_k la oscilación de f en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, entonces:

$$f \text{ es integrable si y sólo si } \quad \text{lím}_{\delta_k \to 0} \sum_k D_k \delta_k = 0.$$

Criterio R_2

Dada $\sigma > 0$ y una partición P, sea $\lambda(P, \sigma)$ la suma de las longitudes de los subintervalos de la partición en los cuales la oscilación de la función es mayor que σ, entonces:

$$f \text{ es integrable si y sólo si } \quad \text{lím}_{\|P\| \to 0} \lambda(P, \sigma) = 0 \text{ para cualquier } \sigma > 0,$$

donde $\|P\|$ es la norma de P.

Este criterio se sigue del criterio R_1 y las siguientes desigualdades:

$\sigma \lambda(P, \sigma) \leq \sum_k D_k \delta_k \leq D\lambda(P, \sigma) + (b - a)\sigma.$

donde D_k es la oscilación de f en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ y D la oscilación de f en el intervalo $[a, b]$.

El criterio R_2 permitió a Riemann dar un ejemplo de una función integrable con un conjunto denso de discontinuidades:

Sea $M = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots\right\}$ y, para $x \in [0, \infty)$, definamos:

$$(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in M \\ x - m(x) & \text{si } x \notin M \end{cases}$$

donde $m(x)$ es el número entero más cercano a x.

Riemann definió entonces la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(kx)}{k^2}$

Se puede demostrar que esta función es discontinua en todos todos los puntos x de la forma $x = \frac{m}{2n}$, donde m y n son dos números naturales tales que m y $2n$ son primos entre sí. Además f satisface el criterio R_2 de Riemann y, por lo tanto, es integrable.

Un ejemplo similar, pero más fácil de tratar, es el siguiente:

Consideremos la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{m}{n} \text{ con } m, n \in \mathbb{N} \text{ y primos entre sí} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esta función es continua en los irracionales y discontinua en los racionales. En efecto, la discontinuidad en un número racional x se sigue del hecho de que nos podemos acercar a x mediante números irracionales, en los cuales f toma el valor 0. Para demostrar la contuidad en un número irracional, primero observemos que dada $\varepsilon > 0$, únicamente existe un número finito de puntos x para los cuales se tiene $f(x) \geq \varepsilon$, de manera que si x_0 es un número irracional en el intervalo $[0, 1]$, podemos tomar una vecindad de x_0 que no contenga a ninguno de los puntos en donde f es mayor o igual a ε. Para cualquier x en esa vecindad se tiene $f(x) - f(x_0) < \varepsilon$.

Por otra parte, f satisface el criterio R_2 de Riemann y, por lo tanto, es integrable. En efecto, dada $\sigma > 0$ y $\varepsilon > 0$, sea $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_M\}$ el conjunto de puntos en los cuales f es mayor o igual que σ y definamos $\delta = \frac{\varepsilon}{3M}$. Si P es una partición de norma menor que δ, hay a lo más $2M$ subintervalos de P que contienen algún punto de A; en el resto de los subintervalos de P la oscilación de f es menor que σ, de manera que si $\lambda(P, \sigma)$ es la suma de las longitudes de los subintervalos de P en los cuales la oscilación de la función es mayor que σ, se tiene $\lambda(P, \sigma) \leq 2M\delta < \varepsilon$, así que $\lim_{\|P\| \to 0} \lambda(P, \sigma) = 0$.

Hermann Hankel, discípulo de Riemann, introdujo en 1870 ([24]) el concepto de oscilación de una función en un punto y reformuló el criterio de Riemann en los siguientes términos:

> Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y $x \in (a, b)$. Sea $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de intervalos cerrados encajados que contengan a x como punto interior y tales que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}$; denotemos por O_n a la oscilación de f en el intervalo I_n; entonces el límite $\lim_{n \rightsquigarrow \infty} O_n$ existe y es independiente de la sucesión particular de intervalos encajados con las propiedades dadas antes. A ese límite se le llama la oscilación de la función f en el punto x.

Demostró entonces, erróneamente, que una función es integrable si y sólo si para cualquier $\varepsilon > 0$ el conjunto de puntos donde la oscilación de la función es mayor que ε es denso en ninguna parte.

Durante varios años prevaleció la búsqueda de la caracterización de las funciones integrables en base a la pequeñez topológica del conjunto de sus discontinuidades y, en esa búsqueda, se puede observar la confusión que existía respecto a los diferentes conceptos de pequeñez que podían definirse.

Alrededor del año 1873 tal confusión radicaba básicamente en la idea de que un conjunto es denso en ninguna parte si y sólo si es de primera especie.

Recordemos que si $A \subset \mathbb{R}$, se denota por $A^{(1)}$ al conjunto de puntos de acumulación de A, por $A^{(2)}$ al conjunto de puntos de acumulación de $A^{(1)}$, etc... Al conjunto $A^{(n)}$ se le llama el enésimo conjunto derivado de A. Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es de primera especie si $A^{(n)}$ es finito para alguna n.

En 1873 era ya bien conocido que un conjunto acotado de primera especie es denso en ninguna parte: si un conjunto es denso en algún intervalo, entonces el conjunto de sus puntos de acumulación también lo es; de manera que ese conjunto no puede ser de primera especie.

Sin embargo, se pensaba que los conjuntos de primera especie agotaban las posibilidades de los conjuntos densos en ninguna parte. La confusión terminó cuando se inventaron métodos para construir conjuntos densos en ninguna parte.

Paul du Bois Reymond dio en 1883 ([16]) un ejemplo de un conjunto denso en ninguna parte que no es de primera especie:

Sea I_n una sucesión de intervalos ajenos cuyos puntos extremos convergen al punto P.

En el interior de I_n definamos un conjunto Q_n de orden n y sea $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$.

Q es un conjunto denso en ninguna parte pues cada conjunto Q_n lo es y éstos se encuentran en intervalos ajenos.

Por otra parte, $P \in Q^{(n)}$ para toda n, por lo tanto, Q no es de primera especie.

Otro método de construcción de conjuntos densos en ninguna parte fue desarrollado de manera independiente por Henry John Stephen Smith en 1875 ([48]), Vito Volterra en 1881 ([55], [56]) y Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor durante el periodo 1879-1884 ([5], [6], [7], [8], [9]). Este método es el que se utiliza actualmente para definir el conjunto de Cantor, el cual es un ejemplo de un conjunto denso en ninguna parte que no es de primera especie.

Definamos:

$F_0 = [0, 1]$,

$F_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$,

$F_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$,

$\vdots$

En general, si ya tenemos definido el conjunto F_n, éste consta de una unión de 2^n intervalos cerrados ajenos. El conjunto F_{n+1} se construye entonces partiendo cada uno de esos intervalos en 3 intervalos de la misma longitud y eliminando el intervalo central abierto.

$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ es llamado el conjunto de Cantor y tiene las siguientes propiedades:

- Es un conjunto denso en ninguna parte
- $F = F^{(n)}$ para toda n, por lo tanto, no es de primera especie.

Durante ese periodo emergió una nueva clase de conjuntos, los de contenido cero:

Definición 2. *Se dice que un conjunto tiene contenido cero si, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe una familia finita de intervalos abiertos cuya unión cubre al conjunto y tales que la suma de sus longitudes es menor que ε.*

Se pudo demostrar además que esta nueva clase de conjuntos se ubica entre las otras dos que hemos mencionado, es decir, todo conjunto acotado de primera especie tiene contenido cero y a su vez todo conjunto de contenido cero es denso en ninguna parte.

> Una demostración de la primera de estas contenciones puede basarse en el hecho de que si B es un conjunto acotado tal que el conjunto de sus puntos de acumulación tiene contenido cero entonces B también tiene contenido cero. En efecto, sea C el conjunto de puntos de acumulación de B; entonces, dada $\varepsilon > 0$, existe una colección finita de intervalos abiertos cuya unión cubre a C y tales que la suma de sus longitudes es menor que $\frac{\varepsilon}{2}$; el conjunto de puntos de B que no son cubiertos por la unión de esos intervalos es finito, pues si fuera infinito, siendo además acotado, tendría por lo menos un punto de acumulación, el cual obviamente no estaría en C, lo cual es una contradicción. Tal conjunto finito puede ser cubierto por una colección finita de intervalos abiertos tales que la suma de sus longitudes es menor que $\frac{\varepsilon}{2}$.
>
> Para demostrar la segunda contención, sea B un conjunto denso en algún intervalo $[a, b]$ con $a < b$; entonces, dada cualquier colección finita de intervalos abiertos cuya unión cubra a B, redefínanse los intervalos de tal manera que se tengan intervalos ajenos con la misma unión; de esta forma resulta fácil mostrar que el conjunto de puntos del intervalo $[a, b]$ que no son cubiertos por la unión de esos intervalos es finito, pues de otra manera existiría un intervalo no vacío (c, d), contenido en $[a, b]$, el cual no tendría puntos en común con la unión de tales intervalos; pero, como B es denso en $[a, b]$, el intervalo (c, d) contendría puntos de B, lo cual es una contradicción. Se concluye entonces que dada cualquier colección finita de intervalos abiertos cuya unión cubra a B, la suma de las longitudes de esos intervalos es mayor o igual a $b - a$, de manera que B no puede tener contenido cero.

El conjunto de Cantor, además de ser denso en ninguna parte, tiene contenido cero y, como ya se mencionó, no es de primera especie. Además, con el mismo método con el que se construye el conjunto de Cantor, se pudieron construir conjuntos compactos, densos en ninguna parte, que no son de primera especie y, además, que no tienen contenido cero. Por ejemplo, divídase el intervalo $[0,1]$ en 3 intervalos de la misma longitud, elimínese el interior del subintervalo central y llámese F_1 a la unión de los subintervalos cerrados que restan; divídase cada uno de los 2 subintervalos que forman F_1 en 3^2 intervalos de la misma longitud, elimínese el interior del subintervalo central, llámese F_2 a la unión de los subintervalos cerrados que restan; júntese cada grupo de subintervalos contiguos en un solo intervalo, divídase cada uno de los 2^2 subintervalos que se forman en 3^3 intervalos de la misma longitud y elimínese el interior del subintervalo central; continuando con este proceso indefinidamente, la intersección F de los conjuntos $F_1, F_2, \ldots$ resulta ser un conjunto compacto, denso en ninguna parte y que no tiene contenido cero.

Para probar que F es denso en ninguna parte, obsérvese que cada uno de los 2^n intervalos ajenos que forman F_n tiene longitud igual a:

$$\left(\tfrac{1}{3}\tfrac{3-1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{3^2}\tfrac{3^2-1}{2}\right)\cdots\left(\tfrac{1}{3^n}\tfrac{3^n-1}{2}\right) = \tfrac{1}{2^n}\tfrac{3-1}{3}\tfrac{3^2-1}{3^3}\cdots\tfrac{3^n-1}{3^n} < \tfrac{1}{2^n}.$$

Supongamos que F es denso en algún intervalo (a,b) con $0 \leq a < b \leq 1$, entonces, como F es cerrado, se tiene $[a,b] \subset F$ y, por lo tanto, $[a,b] \subset F_n$ para cualquier n. Así que, como F_n es la unión de 2^n intervalos ajenos, se tiene $[a,b] \subset I$, donde I es alguno de los 2^n intervalos ajenos que componen F_n. De manera que $b - a \leq l(I) < \frac{1}{2^n}$. Como esto pasa para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se concluye que $b - a = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, F es denso en ninguna parte.

Ahora bien, al dividir cada uno de los 2^n intervalos ajenos que forman F_n en 3^{n+1} subintervalos de la misma longitud y eliminar el subintervalo central, la suma de las longitudes de los intervalos que se eliminan está dada por:

$$2^n\tfrac{1}{3^{n+1}}\left(\tfrac{1}{3}\tfrac{3-1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{3^2}\tfrac{3^2-1}{2}\right)\cdots\left(\tfrac{1}{3^n}\tfrac{3^n-1}{2}\right) = \tfrac{1}{3^{n+1}}\tfrac{3-1}{3}\tfrac{3^2-1}{3^3}\cdots\tfrac{3^n-1}{3^n} < \tfrac{1}{3^{n+1}}.$$

De manera que si S es la suma de las longitudes de todos los intervalos abiertos ajenos que componen F^c, se tiene:

$$S < \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3^2} + \cdots = \tfrac{1}{2}.$$

Sea $I_1, I_2, \ldots, I_n$ una colección finita de intervalos abiertos cuya unión cubre F, entonces esos intervalos, junto con los intervalos abiertos ajenos que componen F^c, forman una cubierta del intervalo $[0,1]$. Por lo tanto $S + \sum_{j=1}^{n} l(I_j) \geq 1$, así que:

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} l(I_j) \geq 1 - S > \tfrac{1}{2}.$$

Se concluye entonces que F no puede tener contenido cero.

El ejemplo de Du Bois Reymond aún no era suficiente para aclarar la diferencia entre los 3 tipos de conjuntos, pues el conjunto que él definió es de contenido cero. En efecto, cada conjunto Q_n tiene contenido cero por ser de primera especie y al cubrir el punto P con cualquier intervalo abierto quedan cubiertos todos los conjuntos Q_n a partir de una cierta n.

Todo lo anterior permitió exhibir funciones no integrables cuyo conjunto de discontinuidades sea denso en ninguna parte:

El conjunto de discontinuidades de la función indicadora de un conjunto F, denso en ninguna parte, es el conjunto F. En efecto, sea F un conjunto denso en ninguna parte y sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ su función indicadora.

Si $x_0 \in F^c$, existe entonces un intervalo abierto I tal que $x_0 \in I \subset F^c$, de manera que $f(x) = 0$ para cualquier $x \in I$. Por lo tanto, f es continua en x_0.

Si $x_0 \in F$, entonces, como F es denso en ninguna parte, para cualquier intervalo abierto I que contenga a x_0, se tiene $I \cap F^c \neq \phi$, de manera que existe $y \in I$ tal que $f(y) = 0$. Por lo tanto, f no es continua en x_0.

Finalmente, la función indicadora de un conjunto F, denso en ninguna parte, que no tiene contenido cero, no es integrable.

En efecto, sea $F \subset [0, 1]$ un conjunto denso en ninguna parte que no tiene contenido cero y sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la función indicadora de F. Consideremos una partición $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[0, 1]$.

Como F es denso en ninguna parte, cada subintervalo de la partición contiene una intervalo que no contiene puntos de F, de manera que, cualquiera que sea la partición, se puede elegir en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ un punto ξ_k que no pertenece a F y entonces la suma $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1})$ es igual a cero.

Por otra parte, como F no tiene contenido cero, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, dada cualquier colección finita de intervalos abiertos $I_1, I_2, \ldots, I_m$ cuya unión contenga a F, la suma de las longitudes de esos intervalos es mayor o igual que ε_0. Si en lugar de intervalos abiertos, consideramos una colección finita de intervalos cerrados $I_1, I_2, \ldots, I_m$ cuya unión contenga a F, entonces, dada cualquier $\delta > 0$, podemos cubrir los extremos de esos intervalos con $2m$ intervalos abiertos $J_1, J_2, \ldots, J_{2m}$ tales que la suma de sus longitudes es menor que δ. Por lo tanto, como el interior de los intervalos $I_1, I_2, \ldots, I_m$ junto con los intervalos $J_1, J_2, \ldots, J_{2m}$ cubren a F, la suma de sus longitudes es mayor o igual que ε_0. Se tiene entonces:

$\sum_{k=1}^{m} l\,(I_k) \geq \varepsilon_0 - \sum_{k=1}^{2m} l\,(J_k) > \varepsilon_0 - \delta.$

Como esto es válido para cualquier $\delta > 0$, se concluye que $\sum_{k=1}^{m} l\,(I_k) \geq \varepsilon_0$.

Dada cualquier partición $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[0, 1]$, consideremos los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ que contengan por lo menos un elemento de F. En cada uno de esos subintervalos tomemos un punto ξ_k que pertenece a F y en el resto tomemos un punto ξ_k que no pertenece a F. Entonces la suma $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1})$ es mayor o igual que ε_0.

Así que eligiendo los puntos ξ_k de la primera manera obtenemos una suma

$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1})$

igual a cero y eligiendo los puntos ξ_k de la segunda manera obtenemos una suma

$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1})$

mayor o igualque ε_0.

Por lo tanto, f no es integrable.

Por otro lado, Riemann había mostrado la existencia de funciones cuyas discontinuidades forman un conjunto denso pero que son integrables. Se podía concluir, finalmente, que:

> **no es el tamaño topológico del conjunto de discontinuidades lo que determina que una función sea o no sea integrable**.

Fue en ese momento cuando se pudo ya establecer con toda claridad la condición para que una función sea integrable. Axel Harnack demostró en 1881 ([25]) que:

> **Una función es integrable si y sólo si, para cualquier $\boldsymbol{\sigma} > 0$, el conjunto de puntos donde la oscilación de la función es mayor que $\boldsymbol{\sigma}$ tiene contenido cero.**

La demostración es como sigue:

> Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Obsérvese primero que si P es una partición del intervalo $[a, b]$ y, para $\sigma > 0$ dada, x es un punto en donde la oscilación de f es mayor que σ entonces o bien x pertenece al interior de uno de los subintervalos de P en donde la oscilación de f es mayor que σ, o bien x es un elemento de la partición P. Sea entonces $A(\sigma)$ el conjunto de puntos $x \in [a, b]$ donde la oscilación de f es mayor que σ.
>
> Si f es Riemann integrable, satisface el criterio R_2, así que, dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si P es una partición de norma menor que δ, entonces $\lambda(P, \sigma) < \frac{\varepsilon}{2}$; tomemos entonces una partición particular P de norma menor que δ e intervalos abiertos $I_1, I_2, \ldots, I_n$ cuya unión cubra los puntos de la partición P y tales que la suma de sus longitudes sea menor que $\frac{\varepsilon}{2}$. De esta manera, $A(\sigma)$ queda cubierto por una colección finita de intervalos abiertos tales que la suma de sus longitudes es menor que ε, así que $A(\sigma)$ tiene contenido cero.

Supongamos ahora que $A(\sigma)$ tiene contenido cero para cualquier $\sigma > 0$ y sea $\sigma > 0$ fija. Dada $\varepsilon > 0$, existen entonces intervalos abiertos no vacíos, I_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, de extremos $c_k, d_k \in [a, b]$, tales que $d_k \leq c_{k+1}$ para $k = 1, 2, \ldots, n-1$, $A(\sigma) \subset \cup_{k=1}^{n} I_k$ y $\sum_{k=1}^{n} [d_k - c_k] < \varepsilon$. Dado un intervalo I de la forma $[a, c_1]$, $[d_k, c_{k+1}]$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ o $[d_n, b]$, si la oscilación de f en I es mayor que 2σ, se parte I en dos subintervalos de la misma longitud; si, en ninguno de los subintervalos que se forman, la oscilación de f sigue siendo mayor que 2σ, termina el proceso; si no, se parte en dos subintervalos de la misma longitud cada subintervalo en donde la oscilación de f sea mayor que 2σ.

Continuando con este proceso, en un número finito de pasos se tiene partido I de tal manera que en cada subintervalo de la partición la oscilación de f es menor o igual a 2σ. De esta manera se tiene una partición del intervalo $[a, b]$ formada por todos los extremos de los intervalos I_k $(k = 1, 2, , \ldots, n)$ y por todos los extremos de los subintervalos que conforman cada uno de los intervalos I del tipo descrito arriba.

Definamos entonces δ_1 como la más pequeña de las longitudes de los subintervalos de esta partición y $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{n}\}$. Dada una partición P de norma menor que δ, si la oscilación de f es mayor que 4σ en un subintervalo de P, entonces ese subintervalo intersecta alguno de los intervalos I_k $(k = 1, 2, , \ldots, n)$, por lo tanto, se tiene $\lambda(P, 4\sigma) < \varepsilon + 2n\frac{\varepsilon}{n} = 3\varepsilon$. Así que, por el criterio R_2, f es integrable.

El concepto de contenido cero se convertiría desde ese momento en uno clave para la teoría de la integración. Surgiría más adelante en conexión con la teoría de integrales dobles sobre una región E del plano, cuya frontera requiere tener contenido cero para que la integral pueda ser definida.

En ese momento se tuvieron entonces las bases para desarrollar una teoría del contenido, lo cual fue llevado a cabo por Otto Stolz ([51], [52]), Axel Harnack ([26], [27]), Giuseppe Peano ([39]) y, sobre todo, por Marie Ennemond Camille Jordan ([30]). Todo esto durante el periodo que va de 1883 a 1892:

Las definiciones y propiedades se establecieron en ese periodo tanto para el caso de subconjuntos de los reales como para subconjuntos del plano, siendo similares en los dos casos. También surgieron en este periodo los conceptos de integral superior e inferior de una función, las cuales serán denotadas en lo que sigue por $\overline{\int}$ e $\underline{\int}$ respectivamente.

Sea A un conjunto acotado de números reales y $[a, b]$ un intervalo que lo contenga. Para cada partición P del intervalo $[a, b]$ sea $\bar{S}(P, A)$ la suma de los subintervalos de P que contienen puntos de A y $\underline{S}(P, A)$ la suma de los subintervalos de P contenidos en A. Se define entonces el **contenido exterior** de A, $c_e(A)$, y el **contenido interior** de A, $c_i(A)$ mediante las relaciones:

$$c_e(A) = \text{ínf}\left\{\bar{S}(P, A) : P \text{ es partición del intervalo } [a, b]\right\}.$$

$$c_i(A) = \text{ínf}\,\{\underline{S}(P, A) : P \text{ es partición del intervalo } [a, b]\}.$$

Se dice entonces que A es **Jordan-medible** si $c_e(A) = c_i(A)$ y, en este caso, a esta cantidad común se le llama el **contenido** de A y se le denota por $c(A)$.

Evidentemente todo conjunto de contenido cero es Jordan-medible. También todo intervalo acotado es Jordan-medible y su contenido es igual a su longitud.

Consideremos un intervalo $[a, b]$, entonces la familia de subconjuntos de $[a, b]$ que son Jordan-medibles es cerrada bajo complementos y uniones finitas. Además, si A_1, A_2, $\ldots$,A_n es una familia finita de subconjuntos de $[a, b]$ que son Jordan-medibles y ajenos por parejas, entonces:

$$c\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} c\left(A_k\right).$$

Se observó también durante ese periodo que la teoría del contenido está íntimamente relacionada con la teoría de integración de Riemann, no únicamente porque la caracterización de la integrabilidad de una función se establece con base en el concepto de contenido cero o porque para integrar sobre una región del plano se requiere que la frontera de ésta tenga contenido cero. La relación resulta bastante más profunda, a tal grado que puede decirse que constituyen en realidad la misma teoría, formulada por un lado para los conjuntos y por el otro para las funciones. Por ejemplo, se tienen los siguientes resultados:

Proposición 1. *Sea A un subconjunto del intervalo $[a, b]$ e I_A su función indicadora, entonces:*

$\overline{\int}_a^b I_A(x)dx = c_e(A),$

$\underline{\int}_a^b I_A(x)dx = c_i(A).$

Corolario 1. *A es Jordan-medible si y sólo si I_A es Riemann integrable. Además, en ese caso, se tiene:*

$\int_a^b I_A(x)dx = c(A).$

Proposición 2. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada no negativa y E la región en $\mathbb{R}^2$ acotada por el eje x y la gráfica de f entre a y b, entonces f es Riemann integrable si y sólo si E es Jordan medible. Además, en ese caso, se tiene $\int_a^b f(x)dx = c(E)$.*

Proposición 3. *Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función acotada definida sobre un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$ o de $\mathbb{R}^2$ Jordan medible. Para cada partición P de E en n conjuntos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ Jordan medibles ajenos, definamos $\bar{S}(P, f) = \sum_{j=1}^{n} M_j c(E_j)$ y $\underline{S}(P, f) = \sum_{j=1}^{n} m_j c(E_j)$, donde, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $M_j = \sup\{f(x) : x \in E_j\}$ y $m_j = \text{ínf}\,\{f(x) : x \in E_j\}$, entonces:*

$\overline{\int}_E f(x)dx = \text{lím}_{\|P\|\to 0}\, \bar{S}(P, f),$

$\underline{\int}_E f(x)dx = \text{lím}_{\|P\|\to 0} \underline{S}(P, f),$

donde $\|P\| = \text{máx}\,\{C(E_j) : j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$

En particular, f es Riemann integrable sobre E si y sólo si el límite de las sumatorias $\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)c(E_j)$, donde, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\xi_j \in E_j$, existe cuando $\|P\|$ tiende a 0 y es independiente de los puntos $\xi_j \in E_j$ que se tomen. Además, en ese caso, se tiene:

$$\int_E f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)c(E_j).$$

3. Teoría de la medida de Borel

En 1894-1895, Félix Édouard Justin Émile Borel ([2], [3]) dio las bases para un nuevo avance al introducir el concepto de medida cero:

Definición 3. *Se dice que un conjunto tiene medida cero si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una colección numerable de intervalos abiertos $\{I_n\}$ cuya unión cubre al conjunto y tales que la suma de sus longitudes es menor que ε.*

Curiosamente, el concepto de medida cero no lo introdujo Borel con relación a la teoría de integración. Al introducir ese concepto, Borel estaba atacando un problema de continuación analítica de una función de variable compleja:

Considérese la función de variable compleja

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{z-a_n},$$

donde $A_1, A_2, \ldots$ son números complejos tales que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$ converge y $a_1, a_2, \ldots$ son puntos en el plano complejo que están sobre una curva cerrada C formando un conjunto denso en esa curva.

Se puede ver inmediatamente que si $z \notin C$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{z-a_n}$ converge pues la distancia de z a C es positiva. Consideremos dos puntos P y Q, el primero al interior de la región que forma C y el segundo al exterior de la misma; el problema que se planteó Borel consiste entonces en encontrar un arco circular que una P con Q sobre el cual la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{z-a_n}$ converja absoluta y uniformemente. Esto llevó a Borel a la necesidad de demostrar que existen puntos z sobre C para los cuales la serie en consideración converge.

Para simplificar el razonamiento, consideremos el mismo problema pero con funciones de variable real.

Sea $\{a_1, a_2, \ldots\}$ un conjunto numerable y denso en el intervalo $[a, b]$ y $(A_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales. Para cada $x \in [a, b] - \{a_1, a_2, \ldots\}$ consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{x-a_n}$. Aparentemente tal serie no converge para ninguno de esos puntos x pues el conjunto $\{a_1, a_2, \ldots\}$ es denso en $[a, b]$ y entonces dado cualquier punto $x \in [a, b]$ hay puntos a_n tan cerca de x como se quiera. Sin embargo, siguiendo a Borel, se puede mostrar que, asumiendo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|A_n|}$ converge, existe una infinidad no numerable de puntos $x \in [a, b]$ para los cuales la serie converge. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $u_n = \sqrt{|A_n|}$. Sea ahora l la longitud del intervalo $[a, b]$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n < \frac{l}{2}$. Para cada $n > N$ sea I_n un intervalo abierto con centro en a_n y radio u_n. Se tiene entonces $\sum_{n=N+1}^{\infty} l(I_n) < l$, donde $l(I_n)$ es la longitud del intervalo I_n. Como los puntos $a_1, a_2, \ldots, a_N$ forman un conjunto finito, se pueden cubrir con intervalos abiertos $I_1, I_2, \ldots, I_n$, respectivamente, de tal manera que $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < l$. Si x no pertenece a ninguno de los intervalos $I_{N+1}, I_{N+2}, \ldots$ entonces $|x - a_i| > 0$ para $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ y $|x - a_i| \geq u_i$ para $i \in \{N+1, N+2, \ldots\}$. Por lo tanto:
$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{A_n}{x-a_n}\right| = \sum_{n=1}^{N} \left|\frac{A_n}{x-a_n}\right| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|\frac{A_n}{x-a_n}\right|$
$\leq \sum_{n=1}^{N} \left|\frac{A_n}{x-a_n}\right| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \sqrt{|A_n|} < \infty.$

Lo único que resta probar es que existe una infinidad de puntos $x \in [a, b]$ que no pertenecen a ninguno de los intervalos $I_{N+1}, I_{N+2}, \ldots$. Para esto, Borel demostró el resultado, ahora clásico, que asegura que todo intervalo cerrado y acotado es compacto. De manera más específica, Borel demostró, básicamente como se hace actualmente, que si un intervalo cerrado y acotado es cubierto por una infinidad numerable de intervalos abiertos, entonces existe una colección finita de esos intervalos que también lo cubren.

Con base en ese resultado, si los intervalos $I_1, I_2, \ldots$ cubrieran al intervalo $[a, b]$, necesariamente se tendría $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \geq l$, lo cual es una contradicción. Más aún, si únicamente hubiera una colección numerable de puntos $x \in [a, b]$ que no pertenecen a ninguno de los intervalos $I_1, I_2, \ldots$., estos puntos podrían ser cubiertos por una nueva colección numerable de intervalos abiertos de tal manera que la suma de sus longitudes, sumadas con las longitudes de los intervalos $I_1, I_2, \ldots$, siga siendo menor que l, lo cual no es posible.

Todavía siguiendo a Borel, se puede decir aún más, pues cambiando l por una $\varepsilon > 0$ arbitraria en el razonamiento anterior se muestra que el conjunto de puntos $x \in [a, b]$ para los cuales la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{x-a_n}$ no converge absolutamente pueden ser cubiertos por una colección numerable de intervalos abiertos de tal manera que la suma de sus longitudes sea menor que ε. Es decir, utilizando el concepto que introdujo Borel, el conjunto de puntos $x \in [a, b]$ para los cuales la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{x-a_n}$ no converge absolutamente tiene medida cero.

Además de introducir el concepto de medida cero al resolver el problema que se planteó, la demostración de Borel contiene un resultado que sería clave para que más adelante Lebesgue. pudiera definir el concepto de medida. Ese resultado se puede enunciar de la siguiente manera:

Sea I un intervalo cerrado y acotado y $(I_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de intervalos abiertos tales que $I \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, entonces:

$$l\,(I) \leq \sum_{j=1}^{\infty} l\,(I_j).$$

El resultado parece trivial ya que al evaluar la suma de las longitudes de los intervalos I_j, si dos de ellos se traslapan, podría haber una parte de I cuya longitud se está sumando dos veces; si no se traslapan, al sumar las longitudes de los dos intervalos, esa suma es por lo menos igual a la suma de las longitudes de las partes de I que se encuentran dentro de esos intervalos. Sin embargo, al tratar de formalizar esta idea se llega nuevamente al problema inicial.

Si el conjunto de intervalos abiertos cuya unión cubre I fuera finito, el resultado se puede demostrar fácilmente. En efecto, supongamos que el intervalo acotado $I = [a,b]$ está contenido en la unión de los intervalos no vacíos $I_j = (a_j, b_j)$, con $j \in \{1,2,\ldots,m\}$. Si alguno de esos intervalos tiene longitud infinita, el resultado es trivial, así que podemos suponer que todos los intervalos I_j son finitos. Sea $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ el conjunto que se obtiene al ordenar, del menor al mayor, los puntos $a, b, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_m, b_m$.

Para $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ definamos $I^{(k)} = (x_{k-1}, x_k)$ e $\overline{I}^{(k)} = [x_{k-1}, x_k]$; además, para $j \in \{1,2,\ldots,m\}$, denotemos por $\overline{I}_j$ al intervalo $[a_j, b_j]$. Entonces: 1) los intervalos $I^{(1)}, I^{(2)}, \ldots, I^{(n)}$ son ajenos por parejas; 2) el intervalo I, así como cada uno de los intervalos $\overline{I}^{(j)}$, con $j \in \{1,2,\ldots,m\}$, es la unión de algunos de los intervalos $\overline{I}_k$, con $k\,\{1,2,\ldots,n\}$.

Sean D el conjunto de superíndices de los intervalos de la familia $\left\{\overline{I}^{(k)} : k \in \{1,2,\ldots,n\}\right\}$ cuya unión es igual a I. Como $I \subset \bigcup_{j=1}^{m} I_j$, cada intervalo $\overline{I}^{(k)}$, con $k \in D$, está contenido en algún rectángulo $\overline{I}_j$ $(j \in \{1,2,\ldots,m\})$. Además:

$$l\,(I) = \sum_{\{k\in D\}} l\left(\overline{I}^{(k)}\right).$$

Para cada $j \in \{1,2,\ldots,m\}$, sea D_j el conjunto de superíndices de los intervalos de la familia $\left\{\overline{I}^{(k)} : k \in D\right\}$ que están contenidos en $\overline{I}_j$. Obviamente se tiene:

$$l\,(I_j) = l\left(\overline{I}_j\right) \geq \sum_{\{k\in D_j\}} l\left(\overline{I}^{(k)}\right).$$

Y como cada intervalo $\overline{I}^{(k)}$, con $k \in D$, está contenido en algún rectángulo $\overline{I}_j$ $(j \in \{1,2,\ldots,m\})$, se tiene:

$$\sum_{j=1}^{m} l\,(I_j) \geq \sum_{j=1}^{m} \sum_{\{k\in D_j\}} l\left(\overline{I}^{(k)}\right) \geq \sum_{\{k\in D\}} l\left(\overline{I}^{(k)}\right) = l\,(I).$$

Regresando al problema inicial, sea I un intervalo cerrado y acotado e $(I_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de intervalos abiertos tales que $I \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$. Para demostrar el resultado enunciado, Borel demostró que existe una colección finita de los intervalos I_j cuya unión también contiene a I. Su razonamiento, ahora clásico, fue el siguiente:

Sea

$B = \{x \in [a,b]$: el intervalo $[a,x]$ está contenido en la unión de un número finito

de intervalos de la familia $\{I_j : j \in \mathbb{N}\}\}$.

B es un conjunto no vacío, ya que $a \in B$, y está acotado por b; por lo tanto B tiene un supremo, que denotaremos por x_0.

Como $a \in B$ y b es cota superior de B se tiene $a \leq x_0 \leq b$.

Como $x_0 \in [a,b]$, hay un intervalo $I_{j_0} = (a_{j_0}, b_{j_0})$ al cual pertenece x_0. Siendo x_0 el supremo de B, existe $x \in B$ tal que $x \in (a_{j_0}, x_0]$. Como $x \in B$, hay una colección finita de intervalos de la familia $\{I_j : j \in \mathbb{N}\}$ cuya unión cubre al intervalo $[a,x]$. Entonces agregándole a esa colección el intervalo I_{j_0} (si no está ya incluido), obtenemos una colección finita de intervalos de la familia $\{I_j : j \in \mathbb{N}\}$ cuya unión cubre al intervalo $[a, x_0]$; así que $x_0 \in B$.

Sea $I_{j_0}, I_{j_1}, I_{j_2}, \ldots, I_{j_m}$ una colección finita de intervalos cuya unión cubre el intervalo $[a, x_0]$. Si se tuviera $x_0 < b$, entonces, si $c = \min(b_{j_0}, b)$, se tendría $x_0 < c \leq b$. Tomando cualquier $y \in (x_0, c)$ se tendría $x_0 < y < b_{j_0}$, así que la unión de los intervalos $I_{j_0}, I_{j_1}, I_{j_2}, \ldots, I_{j_m}$ también cubriría al intervalo $[a,y]$. Como $(x_0, c) \subset [a,b]$, se tendría $y \in [a,b]$ y, por lo tanto, $y \in B$, lo cual no es posible ya que $x_0 < y$ y x_0 es el supremo de B. Por lo tanto, $x_0 = b$ y, entonces, el intervalo $[a,b]$ está contenido en la unión de un número finito de intervalos de la familia $\{I_j : j \in \mathbb{N}\}$.

Más adelante, en un libro publicado en 1898 ([4]), Borel retomó el concepto de conjunto de medida cero. para desarrollar una teoría de la medida. Para esto, influenciado en parte por el trabajo de Jules Joseph Drach, siguió el método axiomático. Para Borel la idea fundamental consistía en definir los elementos nuevos que se introducen con ayuda de sus propiedades esenciales, es decir, aquellas que son estrictamente indispensables para los razonamientos que siguen. En el caso de la medida, las propiedades esenciales que planteó Borel son las siguientes:

1. La medida de la unión de una colección numerable de conjuntos ajenos es igual a la suma de sus medidas.
2. La medida de la diferencia de dos conjuntos de medida finita A y B, con $A \subset B$, es igual a la diferencia de sus medidas $m(B) - m(A)$.
3. La medida de un conjunto nunca es negativa.

Llamaba entonces conjuntos medibles a todos aquellos conjuntos a los cuales se les pueda asignar una medida en base a las propiedades mencionadas, tomando como punto de partida que la medida de un intervalo es su longitud.

Borel no vio relación entre su concepto de medida y el de integral. Más aún, aclaraba que el problema que él estaba investigando era totalmente diferente del resuelto por Jordan. Además, consideraba la definición que hacía Jordan de los conjuntos medibles (con contenido) como más general que la que él daba pues, por ejemplo, con base en la definición de Jordan, cualquier subconjunto del conjunto de Cantor es medible, de manera que, teniendo el conjunto de Cantor la misma cardinalidad que los números reales, la familia de conjuntos Jordan medibles tiene una cardinalidad mayor que la de los reales. Por otra parte, se puede mostrar que la familia de conjuntos medibles que define Borel tiene únicamente la cardinalidad de los números reales.

4. Teoría de la medida de Lebesgue

El paso siguiente en el desarrollo de la Teoría de la Medida, así como el último paso hacia la caracterización de las funciones Riemann-integrables lo dió Henri Léon Lebesgue en 1902 ([31])

Para la caracterización de las funciones Riemann integrables, Lebesgue primero demostró una forma ligeramente distinta del resultado de Harnack:

Si, dada $\boldsymbol{\sigma} > 0$, B($\boldsymbol{\sigma}$) denota al conjunto de puntos en donde la oscilación de la función f es mayor o igual que $\boldsymbol{\sigma}$, entonces f es integrable si y sólo si para cualquier $\boldsymbol{\sigma} > 0$, B($\boldsymbol{\sigma}$) tiene contenido cero.

Mostró además que, para cualquier $\sigma > 0$, $B(\sigma)$ es un conjunto cerrado, de manera que, siendo acotado, es compacto.

Las demostraciones de estos resultados son como sigue:

Sea $A(\sigma)$ el conjunto de puntos en donde la oscilación de f es mayor que σ, entonces:

$A(\sigma) \subset B(\sigma) \subset A(\frac{\sigma}{2})$

Así que si f es integrable entonces $A(\frac{\sigma}{2})$ tiene contenido cero y, por lo tanto, $B(\sigma)$ también. Inversamente, si $B(\sigma)$ tiene contenido cero para cualquier $\sigma > 0$, entonces $A(\sigma)$ también.

Para probar que $B(\sigma)$ es un conjunto cerrado, sea x un punto de acumulación de $B(\sigma)$, entonces toda vecindad de x contiene puntos de $B(\sigma)$, es decir, puntos en donde la oscilación de f es mayor o igual que σ. Por lo tanto, la oscilación de f en x es también mayor o igual que σ, así que x pertenece a $B(\sigma)$.

Lebesgue observó entonces que si D es el conjunto de puntos en donde la función es discontinua, se tiene $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(\frac{1}{n})$. Entonces, si f es Riemann integrable, $B(\frac{1}{n})$ tiene contenido cero para cualquier $n \in \mathbb{N}$, así que D tiene medida cero. Por otra parte, si D tiene medida cero, entonces $B(\frac{1}{n})$ tiene medida cero para cualquier $n \in \mathbb{N}$, de manera que, siendo estos conjuntos compactos, también tienen contenido cero; finalmente, dada $\sigma > 0$ arbitraria y $n > \frac{1}{\sigma}$ se tiene $B(\sigma) \subset B(\frac{1}{n})$, así que $B(\sigma)$ tiene contenido cero. Se tiene así la siguiente caracterización de las funciones Riemann integrables:

Una función acotada $\mathbf{f} : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \mapsto \mathbb{R}$ es Riemann integrable si y sólo si el conjunto de puntos donde la función es discontinua tiene medida cero.

Lebesgue desarrolló su teoría de la integral en su tesis doctoral titulada *Integrale, longueur, aire* ([31]). Más tarde la expuso en su libro *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* ([32]).

Para definir la integral, primero desarrolló su teoría de la medida de conjuntos, pero el interés de Lebesgue estaba centrado en la definición de la integral ya que había analizado antes que las propiedades de la integral con la que se trabaje juegan un papel muy importante en algunos resultados acerca de la teoría de funciones; en particular en su libro dedica un capítulo al vínculo entre la integral y la búsqueda de la primitiva de una función, es decir, una función tal que su derivada sea la función dada. Se planteó entonces el encontrar una definición de la integral con mejores propiedades que las integrales conocidas, en particular la integral de Riemann. Se propuso así asignar a cualquier función acotada f, definida en un intervalo finito (a, b), un número real, denotado por $\int_a^b f(x)\,dx$, al cual llamaba la integral de f en el intervalo (a, b). Planteó que esta integral debe tener las siguientes propiedades:

1. Para cualesquiera $a, b, h \in \mathbb{R}$, se tiene:
   $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x-h)\,dx$.
2. Para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{R}$, se tiene:
3. $\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0$.
4. $\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx$.
5. Si f es no negativa y $a < b$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ es no negativa.
6. $\int_0^1 1dx = 1$.
7. Si una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es no decreciente y converge a la función f, entonces la sucesión de integrales $\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

En seguida hizo algunas observaciones importantes acerca de estas propiedades que planteó para la integral:

> *"La significación, la necesidad y las consecuencias de las cinco primeras condiciones de este problema de integración son más o menos evidentes; no nos extenderemos acerca de ellas. La condición* 6 *tiene un lugar aparte. No tiene ni el mismo carácter de simplicidad que las cinco primeras, ni el mismo carácter de necesidad. Además, mientras que es fácil construir números que satisfagan a cualesquiera cuatro de las cinco primeras condiciones, sin satisfacer a las cinco, lo cual muestra que esas cinco condiciones son independientes, no se sabe si las seis condiciones del problema de integración son independientes o no."En una nota a pie de página, agrega: "La respuesta a esta pregunta importa poco para las aplicaciones, pero presenta interés desde el punto de vista de los principios. Si se demostrara que esta sexta condición es independiente de las otras cinco, cabría buscar reemplazarla por una sexta más simple y sobre todo buscar si, entre los sistemas de números que satisfacen solamente a las cinco primeras condiciones, no hay algunos tan útiles como el que va a ser estudiado."*

Años más tarde, Stefan Banach demostraría que la sexta condición que plantea Lebesgue es independiente de las primeras cinco ([1]).

Aclaraba Lebesgue que la definición de la integral que daba es descriptiva, es decir que la ha definido mediante las propiedades características que tiene. Se propuso entonces dar una definición constructiva equivalente a la descriptiva; es decir, enunciar las operaciones que se requieren realizar para definir la integral de una función acotada de tal manera que se satisfagan las seis condiciones de la definición descriptiva.

En seguida mostró Lebesgue que para dar una definición constructiva de la integral de cualquier función acotada, basta con hacerlo para las funciones que únicamente toman como valores 0 y 1 y, para una función f de este tipo, el problema de integración se traduce en asignar un número al conjunto de números reales $x \in (a, b)$ tales que $f(x) = 1$; de manera que entonces se planteó Lebesgue el **problema de la medida**, de conjuntos el cual consiste en asignar a cada conjunto acotado de números reales E, un número no negativo, $m(E)$, al cual llamará la medida de E, debiéndose satisfacer las siguientes propiedades:

1. Si E es un conjunto acotado y $a \in \mathbb{R}$, entonces $m(E + a) = m(E)$.
2. Si $E_1, E_2, \ldots$ es una familia finita o infinita numerable de una sucesión de conjuntos, ajenos por parejas y contenidos en un conjunto acotado, entonces $m(\bigcup_n E_n) = \sum_n m(E_n)$.
3. $m([0, 1]) = 1$.

Aunque Lebesgue planteó el problema de asignar una medida a cualquier conjunto acotado de números reales, en realidad, como se ve más adelante en su razonamiento, lo que hizo fue encontrar una familia de conjuntos acotados de números reales a los cuales se les pueda asignar una medida de tal forma que se satisfagan las 3 propiedades mencionadas. Para esto, suponiendo que E es un elemento de esa familia, analizó las condiciones que debe satisfacer la medida de E para que se satisfagan las 3 propiedades; más aún, lo que hace es encontrar los conjuntos E para los cuales su medida queda únicamente determinada por esas 3 propiedades. Pero, para lograr esto, lo que hizo Lebesgue fue iniciar su razonamiento asumiendo que el problema de la medida tiene solución, es decir que se puede asignar una medida no negativa a cada subconjunto acotado de números reales. Después restringirá la familia de conjuntos medibles a aquellos cuya medida se pueda determinar de manera única. Luego de hacer esto viene el proceso inverso: partir de una definición de conjunto medible, al cual le asocia una medida, y mostrar que la familia de conjuntos así definida satisface las 3 propiedades que enunció.

Las condiciones sobre la medida implican que si $x \in \mathbb{R}$, entonces $m(\{x\}) = 0$.

En efecto, en primer lugar, si A y B son conjuntos acotados y $A \subset B$, entonces, como $B = A \cup (B - A)$, se tiene $m(B) = m(A) + m(B - A)$, así que $m(B - A) = m(B) - m(A)$ y $m(A) \leq m(B)$. Además, si m es cualquier número entero, la medida del intervalo $[m, m+1]$ debe ser igual a 1. Ahora, si x es cualquier número real, tomemos el único número entero m tal que $x \in [m, m+1)$; dada $\varepsilon > 0$, tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ y consideremos los intervalos $\left[m, m+\frac{1}{n}\right)$, $\left[m, m+\frac{2}{n}\right)$, ..., $\left[m, m+\frac{n}{n}\right)$. Cada uno de estos intervamos tiene la misma medida y la suma de sus medidas es menor o igual a 1, así que la medida de cada uno de ellos es menor o igual a $\frac{1}{n}$. Además, como x pertenece a alguno de esos intervalos, se tiene $m(\{x\}) \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$. Siendo ε arbitrario, se concluye que $m(\{x\}) = 0$.

También, la medida de un intervalo acotado $[a, b]$ debe de ser igual a su longitud.

En efecto, el razonamiento anterior nos lleva a que, si $n \in \mathbb{N}$, la medida de un intervalo de longitud $\frac{1}{n}$ es igual a $\frac{1}{n}$. Así que si $n, m \in \mathbb{N}$, la medida de un intervalo de longitud $\frac{m}{n}$ es igual a $\frac{m}{n}$. De aquí se sigue que la medida de un intervalo con extremos racionales es igual a su longitud. Ahora, el caso $a = b$ ya está tratado, así que tomemos $a < b$ y dado $\varepsilon > 0$, tomemos $c = \min\left\{\varepsilon, \frac{1}{4}(b-a)\right\}$ y cuatro números racionales, r, s, u y v tales que:

$a - c < r < a < u < a + c < b - c < v < b < s < b + c$.

Entonces:

$b - a - 2\varepsilon \leq b - a - 2c < v - u = m([u, v]) \leq m([a, b]) \leq m([r, s]) = s - r < b - a + 2c \leq b - a + 2\varepsilon$.

Siendo ε arbitrario, se concluye que $m([a, b]) = b - a$.

Para definir la medida de cualquier conjunto acotado, Lebesgue hizo el siguiente razonamiento:

Si E es un conjunto acotado e $I_1, I_2, \ldots$ es una colección finita o infinita numerable de intervalos, ajenos por parejas, tales que $E \subset \cup_n I_n$, entonces se debe de tener $m(E) \leq \sum_n l(I_n)$; definió entonces la **medida exterior** de E, $m_e(E)$, como el ínfimo de esas sumas, es decir:

$$m_e(E) = \inf \{\textstyle\sum_n l(I_n) : I_1, I_2, \ldots \text{ son intervalos ajenos por parejas y } E \subset \bigcup_n I_n\}.$$

Aquí hay un detalle que no aclaraba Lebesgue: como el problema que plantea es asignar una medida a cada conjunto acotado, se tendría que asumir que el conjunto $\cup_n I_n$ es acotado. Esto puede hacerse sin causar algún problema; en efecto si $[a, b]$ es un intervalo tal que $E \subset [a, b]$, entonces:

$\text{ínf}\left\{\sum_n l(I_n) : I_1, I_2, \ldots \text{ son intervalos ajenos por parejas y } E \subset U_n I_n\right\}$

$= \text{ínf}\left\{\sum_n l(I_n \cap [a, b]) : I_1, I_2, \ldots \text{ son intervalos ajenos por parejas y } E \subset U_n I_n\right\}$.

Ahora bien, como se tiene que $m\left([a, b]\right) = m\left(E\right) + m\left([a, b] - E\right)$, entonces:

$m\left(E\right) = m\left([a, b]\right) - m\left([a, b] - E\right) \geq m\left([a, b]\right) - m_e\left([a, b] - E\right) = l\left([a, b]\right) - m_e\left([a, b] - E\right)$.

Se sigue que la cantidad:

$$l\left([a, b]\right) - m_e\left([a, b] - E\right)$$

es una cota inferior para la medida de E, la cual define como la **medida interior** de E y la denota por $m_i(E)$.

Lebesgue no demostró que la cantidad $l\left([a, b]\right) - m_e\left([a, b] - E\right)$ es la misma cualquiera que sea el intervalo $[a, b]$, conteniendo E, que se tome; sin embargo esto es cierto, así que la medida interior queda bien definida. En efecto:

Si $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$ son intervalos que contienen a E, su intersección $[a, b]$ también lo contiene, así que para mostrar que tomando $[a_1, b_1]$ se obtiene el mismo resultado que tomando $[a_2, b_2]$, basta con demostrar que tomando $[a, b]$ se obtiene el mismo resultado que tomando cualquiera de los dos. Tomemos entonces dos intervalos, $[a, b]$ y $[c, d]$, tales que $E \subset [a, b] \subset [c, d]$ y, para cada colección finita o infinita numerable de intervalos $I_1, I_2, \ldots$, ajenos por parejas, tales que $[c, d] - E \subset \bigcup_n I_n$, definamos:

$J_n = I_n \cap [a, b]$,

$K_n = I_n \cap [c, a)$,

$L_n = I_n \cap (b, d]$.

Se tiene entonces lo siguiente:

Los intervalos $J_1, K_1, L_1, J_2, K_2, L_2, \ldots$ son ajenos por parejas y la unión de todos ellos es igual a $\left(\bigcup_n I_n\right) \cap [c, d]$.

$[a, b] - E \subset \bigcup_n J_n$.

$[c, d] - [a, b] = \bigcup_n \left(K_n \cup J_n\right)$.

Así que:

$m_e\left([c, d] - E\right) = \text{ínf}\left\{\sum_n l(I_n) : I_1, I_2, \ldots \text{ son intervalos ajenos y } [c, d] - E \subset \bigcup_n I_n\right\}$

$= \text{ínf}\left\{\sum_n l(I_n \cap [c, d]) : I_1, I_2, \ldots \text{ son intervalos ajenos y } [c, d] - E \subset \bigcup_n I_n\right\}$

$= \left\{\text{ínf} \sum_n l(I_n \cap [a, b]) + \sum_n l(I_n \cap [c, a)) + l(I_n \cap (b, d]) :\right.$

$I_1, I_2, \ldots$ son intervalos ajenos y $[c,d] - E \subset \bigcup_n I_n\}$

$= \text{ínf}\,\{\sum_n l(I_n \cap [a,b]) + l([c,d]) - l([a,b]) :$

$I_1, I_2, \ldots$ son intervalos ajenos y $[c,d] - E \subset \bigcup_n I_n\}$

$= l([c,d]) - l([a,b]) + \text{ínf}\,\{\sum_n l(J_n) : J_1, J_2, \ldots$ son intervalos ajenos y $[a,b] - E \subset \bigcup_n J_n\}$

$= l([c,d]) - l([a,b]) + m_e\,([a,b] - E)$.

Así que:

$l([a,b]) - m_e([a,b] - E) = l([c,d]) - m_e\,([c,d] - E)$.

Como ya lo mencionamos, Lebesgue hizo lo anterior asumiendo que es posible asignarle una medida a todo conjunto acotado E, sin embargo las definiciones de medida exterior e interior son independientes de esta consideración y pueden darse para cualquier conjunto. Mostró entonces que se tienen las siguientes relaciones para cualquier conjunto acotado E:

$$c_i(E) \leq m_i(E) \leq m_e(E) \leq c_e(E).$$

Además, como se mostró arriba, de ser posible asignar una medida $m(E)$ al conjunto E, se debe de tener $m_i(E) \leq m(E) \leq m_e(E)$. Por lo tanto, la medida asignada a E será única cuando sus medidas interior y exterior coincidan. De aquí que Lebesgue estableció la siguiente definición:

Definición 4. *Se dice que un conjunto acotado E es medible si $m_i(E) = m_e(E)$.*

Aclaraba Lebesgue que es únicamente para estos conjuntos que se estudiará el problema de la medida, aclarando no saber siquiera si existen conjuntos que no sean medibles. Pero si existen tales conjuntos, decía que el desarrollo posterior que él hace no es suficiente para afirmar ni que el problema de la medida es posible ni que es imposible para tales conjuntos.

Este comentario de Lebesgue es importante pues lo que él hizo fue encontrar cotas más finas que las que daba Jordan para la medida de un conjunto, lo cual automáticamente amplía la familia de conjuntos a los cuales se les puede asignar una medida de manera única. En efecto, la condición $c_i(E) = c_e(E)$ permite asignar a E una única medida y esa condición implica $m_i(E) = m_e(E)$. Pero se puede cumplir la condición $m_i(E) = m_e(E)$, lo cual permite asignar una única medida a E, sin que se tenga $c_i(E) = c_e(E)$. Sin embargo, no se puede asegurar que no sea posible asignarle una medida a conjuntos para los cuales $m_i(E) < m_e(E)$. En caso de que esto fuera posible, tal vez no sería de manera única (de hecho se sabe actualmente que es posible ampliar la familia de conjuntos medibles conservando las propiedades i y iii que pide Lebesgue a la medida, pero tal extensión no es única), o tal vez se puedan encontrar cotas aún más finas que las que da Lebesgue para la medida de un conjunto y se pueda definir una medida con propiedades adicionales a las que propone Lebesgue.

Mostró Lebesgue que se tiene la siguiente propiedad:

Si $E_1, E_2, \ldots$ es una colección finita o infinita numerable de conjuntos medibles, entonces la unión de ellos, así como su intersección, es medible.

Además demostró que la familia de los conjuntos medibles satisface las 3 condiciones que planteó para la medida de los conjuntos y demostró también que si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de conjuntos medibles, entonces $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m\left(E_n\right)$.

Finalmente observó Lebesgue que, debido a la relación:

$$c_i(E) \leq m_i(E) \leq m_e(E) \leq c_e(E).$$

cualquier conjunto Jordan medible es también Lebesgue medible y, dado que los intervalos son medibles y la familia de conjuntos medibles tiene las propiedades enunciadas arriba, todo conjunto medible de acuerdo a la definición de Borel es también Lebesgue medible. De esta forma la teoría de la medida de Lebesgue resulta más general tanto que la de Jordan como de la de Borel y las engloba a ambas.

Años más tarde, en 1914 ([10]), Constantin Carathéodory expresó la condición de medibilidad de un conjunto sin introducir el concepto de medida interior. De acuerdo con la definición de Carathéodory y restringiéndonos a los conjuntos acotados, como hace Lebesgue, un conjunto acotado de números reales E es medible si y sólo si se tiene:

$$m_e(A) = m_e(A \cap E) + m_e(A \cap E^c).$$

para cualquier conjunto acotado de números reales A.

Obsérvese que, de acuerdo con la definición de Lebesgue, para que un conjunto acotado sea medible se requiere que si $[a,b]$ es un intervalo que contiene a E, entonces:

$l([a,b]) - m_e([a,b] - E) = m_i(E) = m_e(E).$

Así que la condición de medibilidad de E puede darse de la siguiente forma:

$l([a,b]) = m_e(E) + m_e([a,b] - E).$

De manera que, si se cumple la condición de medibilidad de Carathéodory, entonces se cumple la condición de medibilidad de Lebesgue.

Por otra parte, se puede demostrar que la medida exterior satisface las siguientes propiedades:

Si A y B son conjuntos acotados tales que $A \subset B$, entonces $m_e(A) \leq m_e(B)$.

Si $A_1, A_2, \ldots$ es una colección finita o infinita numerable de conjuntos acotados cuya unión es un conjunto acotado, entonces:

$$m_e\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n m_e\left(A_n\right).$$

Así que, en particular, la desigualdad $m_e(A) \leq m_e(A \cap E) + m_e(A \cap E^c)$ se cumple para cualquier par de conjuntos acotados E y A.

Sea ahora un conjunto acotado E, medible de acuerdo con la definición de Lebesgue, A un conjunto acotado cualquiera, $[a,b]$ un intervalo tal que $A \cup E \subset [a,b]$ e $I_1, I_2, \ldots$ una colección finita o infinita numerable de intervalos, ajenos por parejas, tales que $A \subset U_n I_n \subset [a,b]$.

De la condición $l([a,b]) = m_e(E) + m_e([a,b]-E)$, se sigue que $[a,b]-E$ es Lebesgue medible. Así que, tanto los conjuntos $I_1 \cap E, I_2 \cap E, \ldots$ como los conjuntos $I_1 \cap E^c, I_2 \cap E^c, \ldots$, son Lebesgue medibles. Además, $A \cap E \subset \bigcup_n (I_n \cap E)$ y $A \cap E^c \subset \bigcup_n (I_n \cap E^c)$, así que:

$$m_e(A \cap E) \leq m_e(\bigcup_n (I_n \cap E)) \leq \sum_n m_e (I_n \cap E) = \sum_n m (I_n \cap E),$$

$$m_e(A \cap E^c) \leq m_e(\bigcup_n (I_n \cap E^c)) \leq \sum_n m_e (I_n \cap E^c) = \sum_n m (I_n \cap E^c).$$

Por lo tanto:

$$m_e(A \cap E) + m_e(A \cap E^c) \leq \sum_n m (I_n \cap E) + \sum_n m (I_n \cap E^c)$$

$$= \sum_n [m (I_n \cap E) + m (I_n \cap E^c)] = \sum_n m (I_n) = \sum_n l(I_n).$$

Así que:

$$m_e(A \cap E) + m_e(A \cap E^c) \leq \text{ínf} \{\textstyle\sum_n l(I_n) : I_1, I_2, \ldots \text{ son intervalos ajenos y } A \subset \bigcup_n I_n\}$$

$$= m_e(A).$$

Por lo tanto, E satisface la condición de medibilidad de Carathéodory.

Más adelante expondremos de manera detallada la formulación moderna de la teoría de la medida Lebesgue, utilizando como condición de medibilidad la de Carathéodory por ser más fácil de manejar. Además, no será necesario restringirnos a los conjuntos acotados.

5. La integral de Lebesgue

La formulación de Riemann del problema de la integral de una función condujo al surgimiento del concepto de contenido y a mostrar cómo se encuentra estrechamente vinculado al de integral, siendo prácticamente dos conceptos equivalentes en el sentido de que con cualquiera de ellos se puede introducir y desarrollar el otro.

Cuando más tarde Borel introdujo el concepto de medida cero y Lebesgue desarrolló una teoría de la medida, más general tanto que la de Jordan como la que había desarrollado Borel, fue posible para el mismo Lebesgue desarrollar una teoría de integración, ahora siguiendo un proceso inverso, es decir, partiendo del concepto de medida para llegar al de integral.

Al igual que la teoría de la medida resultó ser más general que la teoría del contenido, la teoría de la integral desarrollada por Lebesgue resultó ser más general que la teoría de la integral de Riemann.

Es necesario remarcar que Lebesgue desarrolló su teoría de la medida con el objetivo de resolver el problema de la integral que se había planteado. El mismo título del libro que publicó (*Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*) deja ver claramente que su interés principal era el del concepto de integral. En su libro hizo un estudio del desarrollo del concepto de integral y de las definiciones que diferentes autores habían propuesto, haciendo énfasis en las condiciones para que una función sea integrable. Aclaraba el por qué de su interés de no limitarse al estudio de las funciones para las cuales se puede dar una definición simple de la integral:

> *"si se quisiera limitarse siempre a la consideración de esas buenas funciones, habría que renunciar a la resolución de muchos problemas con enunciados simples planteados desde hace mucho tiempo. Es para la resolución de esos problemas, y no por amor a las complicaciones, que he introducido en este libro una definición de la integral más general que la de Riemann y que la incluye como caso particular."*

Una vez definida la integral, Lebesgue se aboca a estudiar sus propiedades y a utilizarla para profundizar en el estudio de la teoría de funciones: "Como aplicación de la definición de la integral, estudié la búsqueda de funciones primitivas y la rectificación de curvas. A esas dos aplicaciones hubiera querido agregar otra muy importante: el estudio del desarrollo trigonométrico de las funciones; pero en mi curso, no pude dar a ese tema más que indicaciones tan incompletas que he juzgado inútil reproducirlas aquí." Con relación a su definición de integral agregó:

> *"Aquellos que me leerán con empeño, lamentando tal vez que las cosas no sean más simples, pienso que estarán de acuerdo conmigo en que esta definición es necesaria y natural. Me atrevo a decir que es, en un cierto sentido, más simple que la de Riemann, tan fácil de asimilar como ella y que únicamente los hábitos adquiridos anteriormente pueden hacerla parecer más complicada."*

La definición de Lebesgue de la integral tuvo su motivación directa en la relación que existe entre la integral de Riemann y la teoría del contenido.

Recordando que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada no negativa y E la región en $\mathbb{R}^2$ acotada por el eje x y la gráfica de f entre a y b, entonces f es Riemann integrable si y sólo si E es Jordan medible y, en ese caso, se tiene $\int_a^b f(x)dx = c(E)$, Lebesgue observó que cuando el conjunto E es (Lebesgue) medible se puede definir la integral de f como $\int_a^b f(x)dx = m(E)$. Automáticamente, esta definición resulta ser una extensión de la integral de Riemann pues si E es Jordan medible también es Lebesgue medible, pero hay conjuntos Lebesgue medibles que no son Jordan medibles. Una vez formulada esta definición geométrica de la integral, Lebesgue se planteó el problema de caracterizar a las funciones integrables y de llegar a la definición de la integral por la vía analítica. El primer problema lo resolvió demostrando el siguiente resultado:

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada no negativa, entonces el conjunto

$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b] \text{ y } y \in [0, f(x)]\}$

es medible si y sólo si el conjunto $\{x \in [a, b] : f(x) > \alpha\}$ es medible para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.

De aquí que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada, la defina como medible si el conjunto $\{x \in [a, b] : f(x) > \alpha\}$ es medible para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.

Se demuestra fácilmente que la suma, el producto y otras operaciones entre funciones medibles resulta ser medible. Demostró Lebesgue una propiedad más cuya importancia resaltaba: el límite de una sucesión convergente de funciones medibles es una función medible.

El segundo problema lo resolvió Lebesgue aproximando la integral de una función medible considerando particiones cada vez más finas del intervalo donde toma valores la función, en lugar de hacerlo, como se hace para definir la integral de Riemann, mediante particiones cada vez más finas del intervalo donde está definida la función. Ésta es una de las ideas originales de Lebesgue en su definición de integral. De manera específica, el razonamiento de Lebesgue es como sigue:

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función medible, $\ell = \inf \{f(x) : x \in [a, b]\}$, $L = \sup \{f(x) : x \in [a, b]\}$ y, dada $\varepsilon > 0$, consideremos una partición del intervalo $[\ell, L]$, $\ell = \ell_0 < \ell_1 < \cdots < \ell_n = L$, de norma menor que ε. Definamos las funciones $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \ell_i I_{\{y\in[a,b]:\ell_i\leq f(y)<\ell_{i+1}\}}(x) + \ell_n I_{\{y\in[a,b]:f(y)=\ell_n\}}(x)$,

$\Phi(x) = \ell_0 I_{\{y\in[a,b]:f(y)=\ell_0\}}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \ell_{i+1} I_{\{y\in[a,b]:\ell_i<f(y)\leq\ell_{i+1}\}}(x)$.

Para cualquier $x \in [a, b]$, se tiene:

$\varphi(x) \leq f(x) \leq \Phi(x)$,

$\Phi(x) - \varphi(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (\ell_{i+1} - \ell_i) I_{\{y\in[a,b]:\ell_i<f(y)<\ell_{i+1}\}}(x) < \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} I_{\{y\in[a,b]:\ell_i<f(y)<\ell_{i+1}\}}(x) \leq \varepsilon$.

Denotemos por λ a la medida de Lebesgue en el intervalo $[a, b]$ y definamos:

$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \ell_i \lambda(\{y \in [a, b] : \ell_i \leq f(y) < \ell_{i+1}\}) + \ell_n \lambda(\{y \in [a, b] : f(y) = \ell_n\})$

$= \sum_{i=0}^{n-1} \ell_i \lambda(\{y \in [a, b] : \ell_i < f(y) < \ell_{i+1}\}) + \sum_{i=0}^{n} \ell_i \lambda(\{y \in [a, b] : f(y) = \ell_i\})$,

$\Sigma = \ell_0 \lambda(\{y \in [a, b] : f(y) = \ell_0\}) + \sum_{i=0}^{n-1} \ell_{i+1} \lambda(\{y \in [a, b] : \ell_i < f(y) \leq \ell_{i+1}\})$

$= \sum_{i=0}^{n-1} \ell_{i+1} \lambda(\{y \in [a, b] : \ell_i < f(y) < \ell_{i+1}\}) + \sum_{i=0}^{n} \ell_i \lambda(\{y \in [a, b] : f(y) = \ell_i\})$.

Observemos que se tiene:

$0 \leq \Sigma - \sigma = \sum_{i=0}^{n-1} (\ell_{i+1} - \ell_i) \lambda(\{y \in [a, b] : \ell_i < f(y) < \ell_{i+1}\})$

$< \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \lambda(\{y \in [a, b] : \ell_i < f(y) < \ell_{i+1}\}) \leq \varepsilon(b - a)$.

Tomemos ahora una sucesión decreciente $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ que converja a cero.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, definamos las funciones $\varphi_m : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $\Phi_m : [a, b] \to \mathbb{R}$, así como los números reales σ_m y Σ_m, como antes, tomando $\varepsilon = \varepsilon_m$. Tomemos las particiones del intervalo $[\ell, L]$ de tal forma que, para cualquier $m \in \mathbb{N}$, la partición $\left\{\ell_0^{(m+1)}, \ell_1^{(m+1)}, \cdots < \ell_{n_{m+1}}^{(m+1)}\right\}$, correspondiente a ε_{m+1}, es un refinamiento de la partición $\left\{\ell_0^{(m)}, \ell_1^{(m)}, \cdots < \ell_{n_m}^{(m)}\right\}$ correspondiente a ε_m. Se tiene entonces que la sucesión de funciones $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es creciente, mientras que la sucesión $(\Phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es decreciente, así que ambas convergen puntualmente. También, la sucesión $(\sigma_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es creciente y la sucesión $(\Sigma_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es decreciente, así que ambas son convergentes.

Además, como $\varphi_m(x) \leq f(x) \leq \Phi_m(x)$ y $\Phi_m(x) - \varphi_m(x) \leq \varepsilon_m$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$ y cualquier $x \in [a,b]$, las sucesiones $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ y $(\Phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ convergen uniformemente a la función f.

También, como $0 \leq \Sigma_m - \sigma_m < \varepsilon_m(b-a)$, las sucesiones $(\sigma_m)_{m\in\mathbb{N}}$ y $(\Sigma_m)_{m\in\mathbb{N}}$ convergen al mismo valor. La integral $\int_a^b f(x)\,dx$ se define como este límite común.

Falta demostrar que se obtiene el mismo valor de la integral para cualquier sucesión decreciente $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ que converja a cero, lo cual hace Lebesgue de la siguiente manera:

Consideremos otra sucesión $(\varepsilon'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ que converja a cero.

Para la sucesión $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ inicial, tenemos una sucesión de particiones $(P_m)_{m\in\mathbb{N}}$ del intervalo $[\ell, L]$, y para la sucesión $(\varepsilon'_m)_{m\in\mathbb{N}}$, tenemos una sucesión de particiones $(P'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ del intervalo $[\ell, L]$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, definamos:

$P''_m = P_m \cup P'_m$.

Se tiene entonces, para cualquier $m \in \mathbb{N}$:

$\sigma_m \leq \sigma''_m \leq \Sigma''_m \leq \Sigma_m$,

$\sigma'_m \leq \sigma''_m \leq \Sigma''_m \leq \Sigma'_m$.

De la primeras desigualdades, se sigue que las sucesiones $(\sigma''_m)_{m\in\mathbb{N}}$ y $(\Sigma''_m)_{m\in\mathbb{N}}$ convergen al mismo valor que las sucesiones $(\sigma_m)_{m\in\mathbb{N}}$ y $(\Sigma_m)_{m\in\mathbb{N}}$.

De las segundas desigualdades, se sigue que las sucesiones $(\sigma''_m)_{m\in\mathbb{N}}$ y $(\Sigma''_m)_{m\in\mathbb{N}}$ convergen al mismo valor que las sucesiones $(\sigma'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ y $(\Sigma'_m)_{m\in\mathbb{N}}$.

Así que, las sucesiones $(\sigma_m)_{m\in\mathbb{N}}$ y $(\Sigma_m)_{m\in\mathbb{N}}$ convergen al mismo valor que las sucesiones $(\sigma'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ y $(\Sigma'_m)_{m\in\mathbb{N}}$.

Obsérvese que si $E \subset [a,b]$, entonces $\int_a^b I_E(x)\,dx = \lambda(E)$.

Una vez definida la integral de una función medible, se demuestran fácilmente las 5 primeras propiedades que Lebesgue planteó como propiedades que debe tener la integral.

La sexta propiedad es un corolario del siguiente resultado que demostró Lebesgue, el cual es ahora conocido como el teorema de la convergencia uniformemente acotada:

Si una sucesión de funciones medibles $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definidas sobre un intervalo $[a,b]$, converge a una función f y existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para cualquier $x \in [a,b]$ y cualquier $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\lim_{n\rightsquigarrow\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Referencias

[1] Banach, S.; *Sur le problème de la mesure*, Fundamenta Mathematicae, 4, p. 7-33, 1923.

[2] Borel, F. E. J. E.; *Sur quelques points de la Théorie des Fonctions*, C. R. Acad. Sci., t. 118, p. 340-342, 1894. Oeuvres de Émile Borel, Tome I, Centre National de la Recherche Scientifique, p. 235-237, 1972.

[3] Borel, F. E. J. E.; *Sur quelques points de la Théorie des Fonctions*, Thèse doctoral, Ann. Ec. Norm. Sup., 3em. série, t. 12, p. 9-55, 1895. Oeuvres de Émile Borel, Tome I, Centre National de la Recherche Scientifique, p. 239-285, 1972.

[4] Borel, F. E. J. E.; *Leçons sur la Théorie des Fonctions*, Gauthier-Villars, 1898.

[5] Cantor, G. F. L. P.; *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten, Pt. 1*, Math. Ann., 15, p. 1-7, 1879.

[6] Cantor, G. F. L. P.; *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten, Pt. 2*, Math. Ann., 17, p. 355-358, 1880.

[7] Cantor, G. F. L. P.; *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten, Pt. 3*, Math. Ann., 20, p. 113-121, 1882.

[8] Cantor, G. F. L. P.; *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten, Pt. 4*, Math. Ann., 21, p. 51-58 y 545-591, 1883.

[9] Cantor, G. F. L. P.; *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten, Pt. 5*, Math. Ann., 23, p. 453-488, 1884.

[10] Carathéodory, C.; *Über das lineare Mass von Punktmengen - eine Verallgemeinerung des Längenbegriffs*, Nachrichten von der Königlichen Gesellchaft der Wiss zu Göttingen, p. 404-426, 1914.

[11] Cauchy, A. L.; *Résume des leçons données a l'Ëcole Royale Polytechnique sur le Calcul Infinitésimal*, Imprimerie Royale, 1823.

[12] Daniell, P. J.; *A general form of integral*, Annals of Mathematics, Vol. 19, 1918.

[13] Daniell, P. J.; *Functions of limited variation in an infinite number of dimensions*, Annals of Mathematics, serie II, Vol. 21, p. 30-38, 1920.

[14] Daniell, P. J.; *Further properties of the general integral*, Annals of Mathematics, Serie II, Vol. 21, p. 203-220, 1920.

[15] Daniell, P. J.; *Integrals in an infinite number of dimensions*, Annals of Mathematics.

[16] du Bois-Reymond, P. D. G.; *Über die Integration der trigonometrischen Reihe*, Math. Ann., 22, p. 260-268, 1883.

[17] du Bois Reymond, P. D. G.; *Über die Integration der Reihen*, berlin Ak. Sber., p. 359-371, 1886.

[18] Fatou, P.; *Séries trigonométriques et séries de Taylor*, Acta. Mat., 30, 1906.

[19] Fourier, J. B. J.; *Théorie analytique de la chaleur*, Ed. Didot, 1822.

[20] Fréchet, M. J.; *Sur quelques points du Calcul Fonctionnel*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 22, p. 1-74, 1906.

[21] Fréchet, M. R.; *Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait*, Bull. Soc. Mat. de France, 43, 1915.

[22] Fréchet, M. R.; *Des familles et fonctions additives d'ensembles abstraits*, Fundamenta Mathematicae, t. 4, 1923.

[23] Fréchet, M. R.; *Des familles et fonctions additives d'ensembles abstraits (Suite)*, Fundamenta Mathematicae, t. 5, 1924.

[24] Hankel, H.; *Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Functionen*, University of Tübingen, 1870, reproducido en Math. Ann., 20, 1882.

[25] Harnack, A.; *Die elemente der Differential und Integralrechnung*, B. G. Teubner, Leipzig, 1881.

[26] Harnack, A.; *Lehrbuch der Differential und Integralrechnung*, 2 Vols., B. G. Teubner, Leipzig, 1884-1885.

[27] Harnack, A.; *Über den Inhalt von Punktmengen*, Math. Ann. 25, p. 241-250, 1885.

[28] Hausdorff, F.; *Grundzüge der Mengenlehre*, Chelsea Publishing Company, 1914.

[29] Hilbert, D.; *Sur les problèmes futures des Mathématiques*, Comptes Rendus du Deuxième Congrès International des mathematiciens, Paris, p. 58-114, 1900.

[30] Jordan, M. E. C;, *Cours d'Analyse de l'École Polytéchnique*, 3 Vols., Gauthier-Villars, 1882-1887. (Second edition, 1893-1896; Third edition, 1909).

[31] Lebesgue, H. L.; *Intégrale, longueur, aire*, Thèse doctoral, Ann. Math. Pur. Appl., 7 (3), p. 231-359, 1902.

[32] Lebesgue, H. L.; *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Gauthier-Villars, 1904.
[33] Lebesgue, H. L.; *Sur la recherche des fonctions primitives par l'intégration*, R. Acc. Lincei Rend., (5), 1907.
[34] Lebesgue, H. L.; *L'intégration des fonctions discontinues*, Ann. Éc. Norm., 27 (3), 1910.
[35] Michel, A.; *Constitution de la théorie moderne de l'intégration*, Librairie Philosophique J. Vrin, 1992.
[36] Moore, G. H., *Lebesgue's measure problem and Zermelo's Axiom of Choice: the mathematical effects of a philosophical dispute*, Ann. N. Y. Acad. Sci., 412, p. 129-154, 1983.
[37] Newman, J. R.; *Sigma, el mundo de las matemáticas, Vol. 3*, 1997.
[38] Nikodym, O.; *Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon*, Fundamenta Mathematicae, XV, p. 131-179, 1930.
[39] Peano, G., *Applicatione geometriche del Calcolo Infinitesimale*, Torino, 1887.
[40] Radon, J.; *Theorie une Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen*, Sitzber der Math Naturwiss, Klasse der Kais, Akademie der Wiss, 122 (II.1), 1913.
[41] Riemann, G. F. B.; *Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique*, Mémoires de la Societé Royale des Sciences de Göttingue, t. XIII, 1867, traducción al francés reproducida en Oeuvres Mathématiques de Riemann, A. Blanchard, Paris, 1968.
[42] Riesz, F.; *Sur les systèmes orthogonaux de fonctions*, C. R. Ac. Sc., 144, 1907.
[43] Riesz, F.; *Sur une espèce de Géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables*, C.R. 144, 1907.
[44] Riesz, F.; *Sur les opérations fonctionnelles linéaires*, C. R. Ac. Sc., 149, 1909.
[45] Riesz, F.; *Sur les suites des fonctions mesurables*, C. R. Ac. Sc., 148, 1909.
[46] Riesz, F.; *Sur quelques points de la théorie des fonctions sommables*, C. R. Ac. Sc., 154, 1912.
[47] Riesz, F.; *L'évolutionde la notion d'intégrale depuis Lebesgue*, Ann. Inst. Fourier, 1, 1949.
[48] Smith, H. J. S.; *On the integration of discontinuous functions*, London Math. Soc. Proc., 6, 1875.
[49] Solovay, R. M.; *A model of Set Theory in which every set of reals is Lebesgue measurable*, Ann. Math., 92, p. 1-56, 1970.
[50] Stieltjes, T. J.; *Recherches sur les fractions continues*, Ann. Fac. Sc. Toul., t. VIII, 1894.
[51] Stolz, O.; *Über einen zu einer unendlichen Punktmenge gehörigen Grenzwerth*, Math. Ann., 23, p. 152-156, 1884.
[52] Stolz, O.; *Grundzüge der Differential und Integralrechnung*, 3 Vols., B. G. Teubner, Leipzig, 1893-99.
[53] Vitali, G.; *Sulle funzioni integrali*, Torino Acc. Sci. Atti, 40, 1904-1905.
[54] Vitali, G.; *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*, Tip. Bamberini et Parmeggiani, Bologna, 1905.
[55] Volterra, V., *Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue*, Giorn. Mat., 19, p. 76-86, 1881.
[56] Volterra, V.; *Sui principii del Calcolo Integrale*, Giorn. Mat., 19, p. 333-372, 1881.